TITLE:
被覆面の型 (調和・解析関数空間と線型作用素II)

AUTHOR(S):
中井, 三留; 瀬川, 重男

CITATION:
中井, 三留 ...[et al]. 被覆面の型 (調和・解析関数空間と線型作用素II). 数理解析研究所講究録 2002, 1277: 84-93

ISSUE DATE:
2002-07

URL:
http://hdl.handle.net/2433/42323

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録 1277 巻 2002 年 84-93

被覆面の型

名工大 (名誉教授) 中井 三留 (Mitsuru Nakai)
Nagoya Institute of Technology (Professor Emeritus)

大同工大 瀬川 重男 (Shigeo Segawa)
Daido Institute of Technology

1. 序論 解析関数の環に関わる様々な構造の解明に, 指定された性質を持つ様な解析関数の構成が重要な役割を果たす事例は屡々目にする所である. この様な解析関数を求める最も直接的な方法としては, 主関数問題 (Rodin-Sario[5] 参照) としての扱いがあり, これに関しては 2000 年暮の関数環研究集会でその一端を論じ (林・中井 [2]) その詳細は論文として発表予定ながら未だ準備中である.

別視点の構成法として古くからあるものに被覆面の方法がある. 例えば, 単位円板 $\mathbb{D}$ 叉は有限複素平面 $\mathbb{C}$ 上解析関数 f があると, これは複素球面 $\hat{\mathbb{C}}$ を基底面とする射影 f の被覆面 $(\hat{\mathbb{C}})^{\sim}=\mathbb{D}$ 叉は $\mathbb{C}$, 詳しくは三つ揃い $(\mathbb{D},\hat{\mathbb{C}},f)$ 叉は $(\mathbb{C},\hat{\mathbb{C}},f)$ を与え, f の性質が $\mathbb{D}$ または $\mathbb{C}$ の $\hat{\mathbb{C}}$ の覆い方と言う幾何学的対象として視覚的に与えられることになる.

そこで構成法としてはこれを逆に見て, 構成したい $\mathbb{D}$ 叉は $\mathbb{C}$ 上の関数 f の持つべき指定された性質を $\mathbb{D}$ 叉は $\mathbb{C}$ の覆い方と捕え, $\hat{\mathbb{C}}$ の無限葉被覆面 $(\hat{\mathbb{C}})^{\sim}$ を単連結となる様に配慮しつつ鋏と糊付け的に構成する. この場合非常に大切となるのは, f の定義域として欲しいのは $\mathbb{D}$ なのか叉は $\mathbb{C}$ なのかに従って, 上に作った単連結リーマン面 $(\hat{\mathbb{C}})^{\sim}$ が $\mathbb{D}$ であるか (このとき $(\hat{\mathbb{C}})^{\sim}$ は**双曲型** と言う) 叉は $\mathbb{C}$ であるか (このとき $(\hat{\mathbb{C}})^{\sim}$ は**放物型** と言う) のいずれかである様にせねばならぬ. つまり上の構成の途中で単連結性のみでなく $(\hat{\mathbb{C}})^{\sim}$ の型への配慮も重要となる. この見地からして, 単連結被覆面 $(\hat{\mathbb{C}})^{\sim}$ の型を判定することは大変重要な課題で, これは **型問題** と呼ばれ特に値分布論との関連で昔から研究されてきた古典関数論の主要な問題の一つである (これについては Nevanlinna[4] に詳しい).

この様な型問題はリーマン面の分類理論の中にとり込まれ, 基底面としては $\hat{\mathbb{C}}$ を一般のリーマン面 R に取り, π を射影とするその被覆面 $(\tilde{R},R,\pi)$ に於て $\tilde{R}$ が **双曲的** (即ち $\mathbb{D}$ の場合の様に, $\tilde{R}$ 上にグリーン関数が存在する) か **放物的** (即ち $\mathbb{C}$ の場合の様に, $\tilde{R}$ 上にグリーン関数が存在しない) かを決定する問題として論ぜられる様になり (Tsuji[7], Sario-Nakai[6] 等参照), 更に被覆面論の枠組みを離れて,

与えられたリーマン面 R が放物的(この事を, グリーン関数 (G) がない (O) ことを示唆したリーマン面の族を O_G で表し, $R \in O_G$ とかく)か双曲的(即ち $R \notin O_G$)かを決定する問題として論ぜられる(例えば[5],[6] 等参照).

本論文では, 前述の $\mathbb{D}$ 叉は $\mathbb{C}$ 上の解析関数の構築の重要性に鑑み, 最も古い設問である型問題に帰り, その一側面, 特に, 一般に分岐点分布と型との独立性に着目する. リーマン面の分類理論の前駆時代での型問題は, 分岐点の数が有限の場合を主として考察の対象とした. ただ分岐点としては代数的なものばかりでなく, 対数分岐点も含めて考えていたので, 我々の, 分岐点の数は自由とするが, 通常の被覆面論の設定通り代数分岐点以外は考えないと言う場合と前提条件においてすっかり異なっている点を強調しておく.

2. 被覆面　リーマン面 $\tilde{R}$ からリーマン面 R への解析写像 π があるとき, 三つ揃い $(\tilde{R}, R, \pi)$ を, 時には雑に $\tilde{R}$ を, R の**被覆面** と言う. 被覆面 $\tilde{R}$ に対し, R を基底面, π を射影と言う.

任意の $\tilde{p} \in \tilde{R}$ 中心の座標円板 $(\tilde{U}, \tilde{z})$ と $p := \pi(\tilde{p}) \in R$ 中心の座標円板 (U, z) を上手くとると, π の局所表現は

$$z = \pi(\tilde{z}) = \tilde{z}^n$$

の形となり, 自然数 n は上の様な表示の仕方に無関係に定まる. $n > 1$ の時 $\tilde{p}$ は重複度 n の分岐点と呼ばれる. 分岐点の全体を $\tilde{B}$ と記すと, $\tilde{B}$ は $\tilde{R}$ の孤立点集合で従って特に可算集合である. $B = \pi(\tilde{B})$ は R 内の可算集合であるが, もはや一般には孤立点集合とはならない. 特に, $\tilde{B} = \emptyset$ のとき被覆面 $(\tilde{R}, R, \pi)$ は不分岐である, 叉は滑らかであると言う. 従って $\tilde{B} = \emptyset$ (特に $B = \emptyset$) であるか否かにかかわらず一般に $(\tilde{R} \setminus \pi^{-1}(B), R \setminus B, \pi)$ は B が閉集合であるかぎり常に滑らかとなる. R の二つの被覆面 $(\tilde{R}_i, R, \pi_i)$ $(i = 1, 2)$ に於て, 夫々の分岐点集合 $\tilde{B}_i$ $(i = 1, 2)$ の間に全単射があって, $\tilde{p}_1 \in \tilde{B}_1$ に $\tilde{p}_2 \in \tilde{B}_2$ が対応して $\tilde{p}_1$ と $\tilde{p}_2$ の重複度は一致しかつ $\pi_1(\tilde{p}_1) = \pi_2(\tilde{p}_2)$ となっているとき二つの被覆面は同一の分岐点をもつと言う.

本論文での被覆面は更に次の様な条件をみたすものばかりを対象とする: $\tilde{R}$ に対して一定の $\nu \in \mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}$ ($\mathbb{N}$ は自然数の全体, $\aleph_0$ は可算無限濃度) が定まって, すべての $z \in R$ に対して

$$\operatorname{card} \pi^{-1}(z) = \operatorname{card}\{\tilde{z} \in \tilde{R} : \pi(\tilde{z}) = z\} = \nu,$$

ただし $\operatorname{card} X$ は集合 X の濃度, となる様な被覆面ばかりを考察の対象とするのである. このとき ν を $\tilde{R}$ の **葉数** と言う. $\nu \in \mathbb{N}$ のとき $\tilde{R}$ は有限葉或いは更に詳しく有限 ν 葉, $\nu = \aleph_0$ のとき $\tilde{R}$ は無限葉であると言う.

上に述べた様に葉数が定まる被覆面ばかりを考えるが, その為の十分条件である次の条件にも注意を向けたい. 被覆面 $(\tilde{R}, R, \pi)$ が **完備** であるとは, R の各点に対し, その適当な近傍 U をとると, $\pi^{-1}(U)$ の各成分が完閉 (compact) となる様に出来ることである (Ahlfors-Sario[1] 参照). 特に $(\tilde{R}, R, \pi)$ が滑らかな場合は, 上の

完備性は $(\tilde{R}, R, \pi)$ の正則性と同値である: 滑らか性 + 完備 = 正則. ここで滑らかな $(\tilde{R}, R, \pi)$ が **正則** であるとは, 基底面 R の任意の曲線弧 C と C の始点上の被覆面 $\tilde{R}$ 上の任意の点を指定すると, それを始点とする C に沿う接続 $\tilde{C}$ が $\tilde{R}$ 上にとれる (つまり $\pi(\tilde{C}) = C$) ことである. 正則性は叉, 非有界とか無限界とか相対境界を持たぬとか様々な呼ばれ方をしている. 接続 $\tilde{C}$ の唯一性とか一価性定理 (即ち, C_i $(i = 1, 2)$ を基底面 R のホモトープな 2 曲線弧とすると, 夫々の同一始点の接続 $\tilde{C}_i$ $(i = 1, 2)$ は $\tilde{R}$ 内でホモトープとなると言う主張) 及びその様々な帰結, 例えば, R が単連結ならば $\pi : \tilde{R} \to R$ は等角写像となる, 等は大切な認識である ([1] 参照).

以下では特に基底面が複素球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 叉は複素平面 $\mathbb{C}$ $(= \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\})$ である様な被覆面を考える. この様な被覆面の型が分岐点の分布, 面の位相的な繋がり具合で決定されるか否かは素朴ながら第一に浮んでくる疑問である. これについて, 次の点を指摘するのが本論文の目的である:

主定理. その射影が無限遠点のみに集積する様な同一の分岐点を共有し, さらに, 分岐点を固定する位相写像で互いに対応すると言う意味で, 同一の繋がり具合にある様な複素球面の二つの単連結無限葉被覆面で, 一方は有限複素平面 (放物型), 他方は単位円板 (双曲型) となるものがある.

つまり, 言う迄もないことながら, 被覆面の型は, 分岐点分布や面の位相的な繋がり具合のみでは決定されず, 計量的条件やらその他何等かの因子が関わってくることになり, 型の決定は単純な問題ではない. 上の定理は, ある具体的な, 鋏と糊で一定の手順で構成する被覆面の型の決定定理を証明し, その系として導かれる.

3. 特殊被覆面の構成　二つのリーマン面 R_1 と R_2 が曲線弧 γ を共有するとする. その意味は, R_i の適当な座標円板 (U_i, z_i) があって, $z_i(U_i) = \mathbb{D}$ 内の曲線弧 γ をとるとき, R_i で考えた二つの $z_i^{-1}(\gamma)$ を考えることである. 特に R_i が平面領域の場合や $R_1 = R_2$ の場合などは本来の自然な意味 (即ち $\gamma \subset R_1 \cap R_2$ 叉は $\gamma \subset R_1 = R_2$) として解釈する. そのとき γ を $R \setminus \gamma$ での除去跡とみて, その両側 (それぞれを適当に上岸 γ^+ と下岸 γ^- と定める) で R_1 の下岸 γ^- と R_2 の上岸 γ^+ 及び R_2 の下岸 γ^- と R_1 の上岸 γ^+ を同一視する. このことを $R_1 \setminus \gamma$ と $R_2 \setminus \gamma$ (雑には R_1 と R_2) を γ に沿って貼り合わせると言う. するとその結果一つのリーマン面 R が生ずる. γ の端点以外の所では等角構造は元々の $\mathbb{D}$ $(\subset R_i)$ でのそれを自然に与え, γ の端点 c では $\mathbb{D}$ $(\subset R_i)$ での局所座標 z を使って, $\sqrt{z - c}$ で等角構造を与えたのである. すると γ は R 内では $\gamma^+ \cup \gamma^-$ となり, それは R 内のジョルダン閉曲線となる. もし γ が R_i 内の解析曲線弧であるとすれば $\gamma = \gamma^+ \cup \gamma^-$ は R 内ではジョルダン解析閉曲線となる. この様な R のことを記号で

$$R = R_1 \biguplus_{\gamma} R_2$$

と表し, R_1 と R_2 の γ に沿う **貼り合わせ** と呼ぶことにする. 記号 $\biguplus_{\gamma}$ の成り立ち

は, $\bigcup$ は一緒にすること, $\times$ はそのときの互い違いの貼り合わせ作業を示唆し, 勿論 γ は作業場所を示すことを一体化したものである.

さて今から複素平面 $\hat{\mathbb{C}}$ の上に拡がった単連結無限葉 (即ち $\aleph_0$ 葉) 被覆面 $W(=(\hat{\mathbb{C}})^{\sim})$ を構成するのであるが, 出来合いの材料としては $\hat{\mathbb{C}}$ の可算個のコピー列 $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (即ち $V_n := \hat{\mathbb{C}}\ (n\in\mathbb{N})$), 自由に選択できる材料としては分岐点の射影集合 $\{\pm a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と, $+a_n$ と $-a_n$ を上半平面 $\mathbb{C}^+ := \{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$ 内で結ぶ単純曲線集合 $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ である.

まず実軸 $\mathbb{R}$ 上の点列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ をとる. よって実数列とみて $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は第一に正数列 (即ち実軸の正部分 $\mathbb{R}^+ := \{z\in\mathbb{R} :\ z = \mathrm{Rm}\, z > 0\}$ 内の点列) でさらに増加列で, $+\infty$ に発散するものとする:

$$(1) \qquad 0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} \nearrow +\infty \quad (n \nearrow \infty).$$

この条件をみたす限り数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は全く任意に選んでよいとする.

次に各 $n\in\mathbb{N}$ に対し, 実軸上の 2 点 $-a_n$ と a_n を結ぶ単純曲線 γ_n で, 端点 $\pm a_n$ 以外は上半平面 $\mathbb{C}^+$ 内にあるものをとる. ただし各 n に対する γ_n 相互間の関係としては

$$(2) \qquad \gamma_n \cap \gamma_m = \emptyset \quad (n, m\in\mathbb{N},\ n\neq m)$$

である. だから各 γ_n は原点 0 と無限遠点 ∞ を $\mathbb{C}^+\cup\mathbb{R}$ 内で分離しており, 又 γ_n は γ_{n-1} と γ_{n+1} を $\mathbb{C}^+\cup\mathbb{R}$ 内で分離する $(n\in\mathbb{N})$, ただし $0 < a_0 < a_1$ となる a_0 を任意にとって固定して, γ_0 は線分 $[-a_0, a_0]$ を意味するものとする. 曲線弧列 $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ もやはり (2) をみたす限り全く任意である. ただし, 点列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は (1) の制限下全く任意ながら一度選んだら終始固定したものと考えるのに対し, 曲線列 $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はやはり (2) の制限下で全く任意であると同時に様々に動かしてみると言う対象である.

さて, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\hat{\mathbb{C}}$ のコピーの列とする: $V_n := \hat{\mathbb{C}}\ (n\in\mathbb{N})$. 勿論各 V_n は $\hat{\mathbb{C}}$ として皆同じものであるが, それらを別々のものと考えようと言うのである. その上で切り込みのある複素球面列 $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を次の様に作る:

$$(3) \qquad W_1 := V_1 \setminus \gamma_1, \qquad W_{n+1} := V_{n+1} \setminus (\gamma_n \cup \gamma_{n+1}) \quad (n\in\mathbb{N}).$$

次に帰納的に双曲的単連結リーマン面 (等角的円板) 列 $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を以下の様に構成する:

$$(4) \qquad R_1 := W_1, \qquad R_{n+1} = R_n \bigotimes_{\gamma_n} W_{n+1} \quad (n\in\mathbb{N}).$$

従って $R_n \cup \gamma_{n+1}$ は (この時 γ_{n+1} は元々の曲線弧そのものと考える), $\hat{\mathbb{C}}$ の n 葉の被覆面と自然に考えられ, しかも, $\overline{R_n} := R_n \cup (\gamma_{n+1}^- \cup \gamma_{n+1}^+)$ は R_{n+1} の部分 (境界付き) リーマン面となっており (そのときは $\gamma_{n+1} = \gamma_{n+1}^- \cup \gamma_{n+1}^+$ は R_{n+1} 内のジョルダン閉曲線と考える)

$$R_1 \subset \overline{R}_1 \subset R_2 \subset \overline{R}_2 \subset \cdots \subset R_n \subset \overline{R}_n \subset R_{n+1} \subset \overline{R}_{n+1} \subset \cdots$$

である. そこで最後にリーマン面

$$W := \bigcup_{n\in\mathbf{N}} R_n = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} (\cdots((W_1 \boxtimes_{\gamma_1} W_2) \boxtimes_{\gamma_2}) \cdots) \boxtimes_{\gamma_n} W_{n+1} \tag{5}$$

を考える. $(W, \hat{\mathbb{C}}, \pi)$ は, W から $\hat{\mathbb{C}}$ への, 作り方から自然に定まる射影, π をもった, $\hat{\mathbb{C}}$ の単連結無限葉被覆面となる. W は開リーマン面で, $(R_n)_{n\in\mathbf{N}}$ は (∂R_n が解析的でないことを'準' で示唆した意味での) 準正則近似列を与える: R_n は W 内相対完閉ジョルダン領域で, $W \setminus \overline{R}_n$ の各成分 (実は唯一つ) は非相対完閉で, $\overline{R}_n \subset R_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, かつ $W = \cup_{n\in\mathbf{N}} R_n$.

曲線列 $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ の在り方に依らず W の分岐点集合 $\tilde{B}$ は可算無限集合で, 夫々は各 $a \in B := \{\pm a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ の上に一つづつありいずれも重複度は 2 である. だから $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ の取り方に依らず, W はすべて同一の分岐点集合 $\tilde{B}$ をもち, 互いに $\tilde{B}$ を固定する位相写像により同相である.

さて被覆面 $(W, \hat{\mathbb{C}}, \pi)$ の型を決定したい. 結論は, 曲線弧列 $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ の分布状態で放物型 (即ち $W \in O_G$) にも双曲型 (即ち $W \notin O_G$) にもなり得る. $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ の分布状態を記述する為次の様な述べ方と記号を用意する. まず $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ が無限遠点 ∞ に収束するとは, 任意の閉円板 $\overline{\Delta}(0,\rho) := \{|z| \leq \rho\}$ $(\rho > 0)$ に対して番号 N が定まり $\gamma_n \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}(0,\rho)$ $(n \geq N)$ となることであるとする. 次に γ_n と実軸 $\mathbb{R}$ 上の線分 $[-a_n, a_n]$ で囲まれた $\mathbb{C}$ 内の (従って $\mathbb{C}^+$ 内の) 有界領域を G_n と記し $(n \in \mathbb{N})$, $\mathbb{C}^+$ に関する $\overline{G}_n$ の補集合を Ω_n とかく, 即ち $\Omega_n := \mathbb{C}^+ \setminus \overline{G}_n$. 閉包を $\hat{\mathbb{C}}$ で考えるとき

$$\Lambda := \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \overline{\Omega}_n \tag{6}$$

とおくならば, 常に無限遠点 $\infty \in \Lambda$ で, Λ は $\hat{\mathbb{C}}$ 内の連続体である. Λ が退化する為の必要十分条件は $\Lambda = \{\infty\}$ である. よって Λ が非退化である為の必要十分条件は $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Lambda = \mathbb{C} \setminus \Lambda \notin O_G$ である.

上記諸概念諸記号を使って W が特定の型となる為の必要十分条件を与える. すると次の結果が成立する:

定理. **複素球面 $\hat{\mathbb{C}}$ の単連結無限葉被覆面 $(W, \hat{\mathbb{C}}, \pi)$ に対して, 次の四つの条件は互いに同値である:**
(a) W は放物型である, 即ち $W \in O_G$;
(b) 曲線列 $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ は無限遠点 ∞ に収束する;
(c) Λ は退化する, 即ち $\Lambda = \{\infty\}$;
(d) 被覆面 $(W \setminus \pi^{-1}(\infty), \mathbb{C}, \pi)$ は完備である.

三条件 (b) と (c) と (d) の相互の同値性は自明であろう. 事実 (b) ならば $\mathbb{C}$ の, 特に $\mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$ のとしても, どの点も十分大きな番号 n に対しては $\overline{\Omega}_n$ に入らないので (c) が出る. 逆に (c) を仮定する. すると $\mathbb{C} \cap (\cap_{n\in\mathbf{N}} \overline{\Omega}_n) = \emptyset$ 又は

$\cap_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{C}\cap\overline{\Omega}_n)=\emptyset$ なので, $\mathbb{C}$ に於て両辺の補集合をとると, $\overline{\Omega}_n$ の $\mathbb{C}$ での補集合が $G'_n := G_n \cup [-a_n, a_n] \cup (\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{C}^+})$ なので $\mathbb{C}=\cup_{n\in\mathbb{N}}G'_n$ となる. よって任意の $\rho>0$ をとるとき, $\overline{\Delta}(0,\rho)\subset\cup_{n\in\mathbb{N}}G'_n$ なので, 被覆定理によりある番号 N が定まって $\overline{\Delta}(0,\rho)\subset\cup_{n\le N}G'_n=G'_N$ となるので, $\gamma_n\subset\mathbb{C}\setminus\overline{\Delta}(0,\rho)$ $(n\ge N)$, つまり (b) が出る. よって, (b) と (c) の同値性が確かめられた. 次に (c) を仮定して任意の $p\in\mathbb{C}$ をとる. $p\notin B=\{\pm a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ならば p 中心の小開円板 V を適当にとると $B\cap\overline{V}=\emptyset$ となり, $\pi^{-1}(V)$ と各葉の交わりは又 V である. ある $n\in\mathbb{N}$ で $p=a_n$ 又は $-a_n$ の場合でも分岐点のある二枚の葉でそれと $\pi^{-1}(V)$ の交わりが二葉円板であるものを除いて各葉との交わりは V である, ただし V は p 中心の小円板で $B\cap\overline{V}=\{p\}$ となるものとする. いずれにしろ (d) が出る. 逆に (d) を仮定して, Λ は非退化, 従ってある点 $p\in\mathbb{C}$ でその任意の近傍 V に対し, 有限個の n を除外して $V\cap\gamma_n\neq\emptyset$ となる. すると $\pi^{-1}(V)$ の成分中無限葉のものがあり, それは相対完閉でない. 故に (c) と (d) も同値である.

この様な次第で, 上の定理の証明には, (a) と残りの三条件 (b) と (c) と (d) の内のどれか一つとの同値性を出せばよい. その為には, 例えば (c) の否定から (a) の否定を導き, 次いで (d) から (a) を導けばよい. 従って次の二命題 (主張 1 と 2) の証明を行えばよい:

主張 1.　集合 Λ が非退化ならば $W\notin O_G$ である.

主張 2.　被覆面 $(W\setminus\pi^{-1}(\infty),\mathbb{C},\pi)$ が完備ならば $W\in O_G$ である.

主張 1 は, その原型となる, 石田 [3] による, ある $\mathbb{C}$ の双曲型無限葉被覆面の構成に着想の原点がある. ここに石田久教授への深い感謝の意を表明したい. 証明は第 4 節で与える. 主張 2 の証明は第 5 節で述べる. この証明の中にあらわれるモデュラス和級数 σ の発散評価については, 成田淳一郎博士の注意のお陰で, 我々の元々の幾分面倒な見積り方法が非常に簡易化されたので, 彼にも御礼を申し上げたい.

さて主定理との関わりであるが, まず各 $n\in\mathbb{N}$ について

$$\gamma_n:\ z=a_ne^{it}\quad(0\le t\le\pi), \tag{7}$$

即ち, γ_n を原点中心半径 a_n の上半円周にとるとき, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は上記定理の条件 (b) をみたすので, 上記定理により (a), 即ち $W\in O_G$ となることがわかる. 次に実数列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, つまり実軸 $\mathbb{R}$ 上の点列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$0<b_1<b_2<\cdots<b_n<b_{n+1}\nearrow a_1/2\quad(n\nearrow+\infty)$$

をみたす様に任意にとりしかる後固定する. そのとき各 $n\in\mathbb{N}$ に対し

$$\gamma_n:\ z=-\frac{a_n^2-b_n^2}{2b_n}i+\frac{a_n^2+b_n^2}{2b_n}e^{it}\quad\left(\tan^{-1}\frac{a_n^2-b_n^2}{2a_nb_n}\le t\le\pi-\tan^{-1}\frac{a_n2-b_n^2}{2a_nb_n}\right),$$

即ち, γ_n を三点 a_n, $b_n i$, $-a_n$ を通る円周の $\mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$ 内にある円弧にとるとき,

$$\Lambda = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq a_1/2\} \cup \{\infty\}$$

だから, 上記定理の (c) がみたされず, 従って上記定理より (a) がみたされぬことになり, $W \notin O_G$ となる. こうして, 上記定理を利用して, 主定理の主張が導かれる.

4. 主張 1 の証明　集合 Λ を非退化, 即ち $\Lambda \cap \mathbb{C} \neq \emptyset$, として, 平面 $\mathbb{C}$ の部分領域 $P := \mathbb{C}^+ \setminus \Lambda$ に注目する. すると

$$P = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} G_n = G_1 \bigcup \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} (G_{n+1} \setminus G_n) \right)$$

の様に分解される. そこで W の部分領域

$$P' := \left(\pi^{-1}(G_1) \cap W_1\right) \bigcup \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \pi^{-1}(G_{n+1} \setminus G_n) \cap (W_{n+1} \cup \gamma_n) \right)$$

を考えると, これは $\pi^{-1}(P)$ の成分の一つであり,

$$\pi : \ P' \cup \partial_W P' \to P \cup \mathbb{R} \tag{9}$$

は位相写像となる, ただし $\partial_W P'$ は P' の W に関する相対境界の意味である. (9) の同相性に基づいて, P' と P を同一視することにより, 元々$P \subset \mathbb{C}$ であった領域 P を又 $P \subset W$ とみなすことも出来る, 即ち平面領域 P は W の部分領域として W にも埋め込まれていると考える.

最初 $P \subset \mathbb{C}$ で考えて, 次の関数をとる: $h \in H(P \setminus \overline{G}_1) \cap C(\overline{P \setminus \overline{G}_1})$ (ただし $H(X)$ で X 上のすべての調和関数の族を表す) で, 境界条件として

$$h|\gamma_1 \cup (\partial_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^+ \setminus [-a_1, a_1]) = 0 \quad \text{かつ} \quad h|\Lambda \cap \overline{P} = 1$$

となるものをとる (ただし, 上記 ∂_W と同様 $\partial_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^+ = \mathbb{R}$ は $\mathbb{C}^+$ の $\mathbb{C}$ に関する相対境界の意味). $P \setminus \overline{G}_1$ の $\mathbb{C}$ に関する相対境界点はすべて非退化連続体である非内点集合に含まれ, 従ってすべてディリクレ問題の正則点であり, 更に理想境界 ($\hat{\mathbb{C}}$ に於て $\mathbb{C}$ に関する相対境界以外の境界の意味で実際は ∞ 一点) は非正則点からなるから, 上の様な関数 h が唯一つ定まる.

今度は $P \subset W$ とみたとき, P 上 h は, 特に各 $n > 1$ ($n \in \mathbb{N}$) につき, $G_n \setminus \overline{G}_1$ (各 $G_n \subset W_n$ とみて) 上の調和関数であって, $\overline{G_n \setminus \overline{G}_1}$ 迄連続に拡張出来

$$h|\gamma_n < 1 \quad \text{かつ} \quad h|(\partial_W(G_n \setminus \overline{G}_1) \setminus \gamma_n) = 0 \tag{10}$$

となっていることに注意する.

次に $w_n \in H(R_n \setminus \overline{R}_1) \cap C(\overline{R}_n \setminus R_1)$ で境界値は $w_n|\partial_W R_1 = 0$ かつ $w_n|\partial_W R_n = 1$

である様な関数 w_n が一意に定まる. 境界値の比較から $w_n \le w_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ であるので, W 上の関数

$$w := \lim_{n\to\infty} w_n$$

が定まる. この関数 w は $W \setminus \overline{R}_1$ 上の W の理想境界の調和測度と呼ばれ, $W \setminus \overline{R}_1$ 上 $w > 0$ か叉は $w \equiv 0$ のいずれかとなり, $W \notin O_G$ は, 前者, 即ち $W \setminus \overline{R}_1$ 上 $w > 0$, で特徴づけられる. 故に主張 1 の証明を完結させる為には, $P \setminus \overline{G}_1$ 上 $w > 0$ を示せばよい. $\overline{G_n \setminus \overline{G}_1}$ に制限すれば, h 同様 $w_n \in H(G_n \setminus \overline{G}_1) \cap C(\overline{G_n \setminus \overline{G}_1})$ かつ

$$w_n|\gamma_n = 1 \quad かつ \quad w_n|(\partial_W(G_n \setminus \overline{G}_1) \setminus \gamma_n) = 0 \tag{11}$$

である. h と w を同時に完閉領域 $\overline{G_n \setminus \overline{G}_1}$ 上で考えるとき, 両者共 $G_n \setminus \overline{G}_1$ 上調和で, $G_n \setminus \overline{G}_1$ の境界 $\partial_W(G_n \setminus \overline{G}_1) = \gamma_n \cup (\partial_W(G_n \setminus \overline{G}_1) \setminus \gamma_n)$ 上の境界値を較べたとき, (10) と (11) により

$$w_n(z) \ge h(z) \quad (z \in \partial_W(G_n \setminus \overline{G}_1))$$

となるので, 比較原理 (最大値の原理) により同じ不等式が $G_n \setminus \overline{G}_1$ 上で成立する. そこで $n \to \infty$ とすることにより $P \setminus \overline{G}_1$ 上 $w \ge h$ となる. ここで Λ の非退化性より $h > 0$ であり, 従って $w \equiv 0$ は不成立であり, $W \notin O_G$ が結論出来る. □

5. 主張 2 の証明 W の分岐点は $\{\pm a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の各点の上に一つづつあり, いずれも重複度は 2 であった. これらの全体を $\tilde{B}$, 更に $B := \pi(\tilde{B})$ とかくと, 無論 $B = \{\pm a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ である. W から $\pi^{-1}(B \cup \{\infty\})$ を取り除いて得られる面を W' とする:

$$W' := W \setminus \pi^{-1}(B \cup \{\infty\}).$$

このとき, W' は $\mathbb{C} \setminus B$ の滑らかな被覆面となる. $(W \setminus \pi^{-1}(\infty), \mathbb{C}, \pi)$ が完備であると言うのが主張 2 の仮定であるので, $(W', \mathbb{C} \setminus B, \pi)$ は, 滑らかかつ完備であるから, 正則であることが結論される.

任意の番号 $n \in \mathbb{N}$ をとるごとに, $a_n < c < a_{n+1}$ となる様な任意の正の実数 c をとり, $\gamma(c) := \partial\Delta(0, c) = \{z : |z| = c\}$ とおく. これを叉閉曲線弧 $\gamma(c) : z = ce^{it}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ とみる. $\mathbb{C}$ 上 W_{n+1} 内にあり, B のどの点も通らず, c を出発し c に戻るジョルダン曲線で, その内側に γ_n, 外側に γ_{n+1} 含むものを γ とする. $\gamma \subset \pi(W')$ とみたとき, γ そのものを W' で考えて, $c \in W_{n+1}$ とみてその c を始点とする γ に沿う接続と考えることも出来る. $\pi(W')$ 内で γ と $\gamma(c)$ はホモトピックだから, 一価性の定理 (モノドロミー定理) により, $\Gamma(c)$ を W' 内の $c \in W_{n+1}$ を始点とする $\gamma(c)$ に沿う接続とすれば, W' 内で γ と $\Gamma(c)$ はホモトピックとなり, $\Gamma(c)$ が W 内のジョルダン曲線となる. W は単連結なので, $\Gamma(c)$ の内部が定まる故それを $R(c)$ と記すことにする. 構成から容易に分かるように B に入らぬ二正数 c と c' で $c < c'$ ならば $\overline{R(c)} \subset R(c')$ となる.

二正数列 $(a_n{}^+)_{n\in\mathbb{N}}$ 及び $(a_{n+1}^-)_{n\in\mathbb{N}}$ を後述の様な条件をみたす様にとるが, さしあたっては条件

$$a_n < a_n^+ < a_{n+1}^- < a_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

をみたす限りは全く任意にとる. すると領域列

$$R(a_1^+),\ R(a_2^-),\ R(a_2^+),\ R(a_3^-), \cdots,\ R(a_n^+),\ R(a_{n+1}^-), \cdots$$

は W の正則近似列となる. この近似列を $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と記す, 即ち $S_{2n-1} = R(a_n^+)$ 及び $S_{2n} = R(a_{n+1}^-)$ $(n \in \mathbb{N})$ とおくのである. さて $\mathbb{C}$ 上の円環

$$A_n := \{z \in \mathbb{C} :\ a_n^+ < |z| < a_{n+1}^-\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

及び W 上の二重連結領域 (アニュラス)

$$\tilde{A}_n := S_{2n} \setminus \overline{S}_{2n-1} = R(a_{n+1}^-) \setminus \overline{R(a_n^+)} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

を考える. すると $\pi(\tilde{A}_n) = A_n$ である. $\alpha := [a_n^+, a_{n+1}^-]$ とおくとき, W' 内での W_{n+1} の点 a_n^+ を始点とする α に沿う接続を $\tilde{\alpha}$ とすると, $\tilde{\alpha}$ の終点は $a_{n+1}^- \in W_{n+1} \subset W'$ となる. すると $\pi(\tilde{A}_n \setminus \tilde{\alpha}) = A_n \setminus \alpha$ となる. $A_n \setminus \alpha$ は単連結なので, $(W', \mathbb{C} \setminus B, \pi)$ が正則であり, $\tilde{A}_n \setminus \tilde{\alpha} \subset W'$ かつ $A_n \setminus \alpha \subset \mathbb{C} \setminus B$ なので, 一価性の定理 (の系, 即ち単連結領域の正則な滑らかな被覆面は又単連結で射影は等角写像となることを言う主張) により, $\pi :\ \tilde{A}_n \setminus \tilde{\alpha} \to A_n \setminus \alpha$ は等角写像で, 又 $\pi :\ \tilde{\alpha} \to \alpha$ は全単射であり, π が $\tilde{\alpha}$ の各点で解析的なことから, $\pi :\ \tilde{A}_n \to A_n$ は等角写像なることがわかる. 以上により A_n や $\tilde{A}_n$ のモデュラス mod に関する最も肝心な等式

$$\operatorname{mod} \tilde{A}_n = \operatorname{mod} A_n = \log \frac{a_{n+1}^-}{a_n^+} \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{12}$$

が結論出来る.

$a_n^+ \downarrow a_n$ 及び $a_{n+1}^- \uparrow a_{n+1}$ とすると $\log(a_{n+1}^-/a_n^+) \uparrow \log(a_{n+1}/a_n)$ である故に, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して a_n^+ 及び a_{n+1}^- を

$$\log \frac{a_{n+1}^-}{a_n^+} > \frac{1}{2} \log \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

となる様に選ぶことが出来る. これが上に予告した $(a_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ 及び $(a_{n+1}^-)_{n\in\mathbb{N}}$ の選び方で, 上の様に定めたものを固定する. すると (12) から

$$\operatorname{mod} \tilde{A}_n > \frac{1}{2} \log \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{13}$$

が導かれる.

そこで W の正則近似列 $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に関するモデュラス和

$$\sigma := \sum_{m\in\mathbb{N}} \operatorname{mod}(S_{m+1} \setminus \overline{S}_m)$$

を考える. すると σ の和をとびとびにとり

$$\sigma = \sum_{m\in\mathbb{N}} \mathrm{mod}(S_{m+1} \setminus \overline{S}_m) > \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{mod}(S_{2n} \setminus \overline{S}_{2n-1}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{mod}\,\tilde{A}_n$$

となる. よって更に (13) を使うと

$$\sigma \geq \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{N}} \log\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\sum_{1\leq n\leq N}\log\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}(\log a_{N+1} - \log a_1) = +\infty$$

により $\sigma = +\infty$ となる. $W \in O_G$ となる為には, $\sigma = +\infty$ となる W の正則近似列が存在すること (この場合 $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がそれ) が必要十分であると言う Sario-Noshiro の判定条件 (例えば [6] 参照) により (実際今の所十分性を使うだけであるが), W が放物型 (即ち $W \in O_G$) であることが結論出来る. □

参 照 文 献

[1] L.V. Ahlfors and L. Sario: *Riemann Surfaces*, Princeton Univ. Press, 1960.

[2] 林実樹廣・中井三留: 主関数問題と有理型関数体, 研究集会「関数環論とその応用」, 2000 年 12 月, 早稲田大学.

[3] 石田久: 私的な会話, 2001 年 7 月, 京都大学数学教室.

[4] R. Nevanlinna: *Analytic Functions*, Springer, 1970.

[5] B. Rodin and L. Sario: *Principal Functions*, Van Nostrand, 1970.

[6] L. Sario and M. Nakai: *Calssification Theory of Riemann Surfaces*, Springer, 1970.

[7] M. Tsuji: *Potential Theory in Modern Function Theory*, Maruzen, 1959.